option M

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

Problème 1

Soit $E = IR^3$, et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct. On note Σ la sphère de centre O de rayon 1.

On dit qu 'un cône $\mathcal{C}$ de sommet S est tangent à Σ si et seulement si ses génératrices sont tangentes à Σ. On pourra utiliser que dans ce cas le cône est de révolution et que $\mathcal{C} \cap \Sigma$ est un cercle C. On dit que $\mathcal{C}$ est circonscrit à Σ le long de C.

1. Soit $\mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ un repère orthonormé et Π le plan d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}'$:

   $a x + b y + c z = h$ avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $h \in [-1,1]$.

   a) Déterminer le rayon du cercle $C = \Sigma \cap \Pi$.
   b) On suppose de plus $h \neq 0$. Déterminer dans le repère $\mathcal{R}'$, les coordonnées de S, sommet du cône circonscrit à Σ le long de C .
   c) Inversement, soit S de coordonnées (α,β,γ) dans $\mathcal{R}'$, telles que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 1$. Déterminer les équations cartésiennes du cercle intersection de Σ et du cône de sommet S tangent à Σ.

   On définit ainsi une application bijective de l'ensemble des cercles, autre que les grands cercles, tracés sur Σ sur l'extérieur de la sphère .

2. Considérons les vecteurs $\vec{u} = \vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{v}(\theta) = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$, et le repère orthonormé direct $R_\theta = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}$:

   $4z^2(x^2 + y^2) = 1$.

   a) Déterminer l'intersection $\Sigma \cap \mathcal{S}$. Comparer, en un point de l'intersection, les plans tangents aux deux surfaces.
   b) Donner une représentation paramétrique en coordonnées cylindriques de $\mathcal{S}$.

3. Soit S le point de $\mathcal{S}$ défini par : $\overrightarrow{OS} = \rho\vec{u} + \frac{1}{2\rho}\vec{k}$ avec $\rho^2 \neq \frac{1}{2}$.

   Montrer que parmi les tangentes à $\mathcal{S}$ en S, deux sont tangentes à Σ.
   On donnera un vecteur directeur de chacune de ces deux droites dans le repère R_θ .

4. Soit (γ) une courbe tracée sur $\mathcal{S}$ définie paramétriquement par :

   $\theta \mapsto \overrightarrow{OS(\theta)} = \rho(\theta)\vec{u} + \frac{1}{2\rho(\theta)}\vec{k}$, où ρ est de classe C^1 .

   a) Montrer que les tangentes à (γ) en S sont tangentes à Σ si et seulement si :

   $$\forall\theta, \left(\rho^2 = \frac{1}{2} \text{ ou } (\rho'(\theta))^2 = (\rho(\theta))^4\right) .$$

   Dans la suite on choisira $\rho(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

b) Déterminer dans le repère R_θ les coordonnées du point M(θ) , intersection de Σ et de la tangente à (γ) issue de S(θ). Soit (Γ) la courbe décrite par le point M(θ).

c) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{S(\theta)M(\theta)}$ et le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$ sont orthogonaux.

5. Dans cette question on suppose $\theta^2 \neq 2$.

a) Montrer que le vecteur $\frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}$ peut se mettre sous la forme $f(\theta)\frac{d\vec{M}}{d\theta} + g(\theta)\vec{v}$ où f et g sont deux fonctions de θ à déterminer. En déduire une équation cartésienne dans le repère R_θ du plan osculateur à (Γ) au point M(θ), , que l'on appellera Π.

b) Déterminer le rayon du cercle $\Pi \cap \Sigma$.

c) Déterminer le rayon de courbure à (Γ) au point M(θ). Conclusion ?

d) Quelle est l'image du cercle précédent par la transformation définie au 1°)?

Problème 2.

On considère E espace vectoriel euclidien de dimension n entier supérieur ou égal à 2. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E sera noté $(x|y)$.

On rappelle que pour tout endomorphisme f *de* E, *l'adjoint de* f, *noté* f*, *est l'unique endomorphisme vérifiant:* $\forall (x,y) \in E^2, (f(x)|y) = (x|f^*(y))$.

Un endomorphisme symétrique est dit positif si et seulement si: $\forall x \in E, (f(x)|x) \geq 0$.

Si f *et* g *sont deux endomorphismes, on notera* fg *pour* f∘g *composée des deux endomorphismes. Etant donnés deux espaces vectoriels euclidiens de dimension* n, E *et* F, *une application linéaire* f *de* E *dans* F *est une isométrie si et seulement si un vecteur de* E *et son image dans* F *ont même norme. On notera* $[|1; n|]$ *l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et* n.

I.

1) Pour f et g endomorphismes de E, prouver (f*)*=f, et (fg)*=g*f*. Déterminer f* lorsque f est symétrique, puis lorsque f est orthogonal.

2) a) Montrer qu'un endomorphisme symétrique est positif si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

b) Montrer que ff* et f*f sont des endomorphismes symétriques positifs.

3) Soient f et g des endomorphismes symétriques positifs.

a) Montrer que si $f=g^2$, alors il existe une base orthonormée dans laquelle f et g ont une matrice diagonale.

b) Comparer alors les sous-espaces propres de f et de g, et en déduire que tout endomorphisme symétrique positif est le carré d'un unique endomorphisme symétrique positif.

II. On considère maintenant un endomorphisme f **quelconque**. On veut montrer qu'il existe h endomorphisme symétrique positif et u opérateur orthogonal tels que f = hu.

1) Montrer l'unicité de h en étudiant ff*.

2) Si f est inversible, montrer que la décomposition demandée existe et est unique.

3) On suppose que f n'est pas inversible.

a) Comparer Ker(f*) et Ker(ff*). en déduire Ker(h).

b) On note $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de ff*, $F_1,\ldots,F_r$ les sous-espaces propres associés, et N=Ker(ff*).

α)Montrer que: $\forall x \in E, (x \in F_j \Rightarrow h(x) = \sqrt{\lambda_j}x)$. On note $G_j = f^*(F_j)$.

β) Prouver que $\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} f^*$ induit une isométrie v_j de F_j sur G_j.

γ) Montrer que si i et j sont distincts, alors G_i et G_j sont orthogonaux. Que peut-on en déduire pour $G_1+\ldots+G_r$? Soit M l'orthogonal de cette somme.

δ) Etablir l'existence d'une isométrie w de N sur M.

En déduire que l'application v définie par: $\begin{cases} \text{v liné aire} \\ \forall j \in [\![1;r]\!], \forall x \in F_j, v(x) = v_j(x), \\ \forall x \in N, v(x) = w(x) \end{cases}$ définit une isométrie de E.

c)Montrer que:f*=vh, et en déduire l'existence de u opérateur orthogonal tel que: f=hu.

d) Ya-t-il toujours unicité du couple (h,u)?

III.On considère dans cette partie f endomorphisme quelconque de E, écrit sous la forme hu, avec h symétrique positif, et u opérateur orthogonal. Soient $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n \geq 0$ les valeurs propres distinctes ou non de h et $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.
(ie: $\forall i \in [\![1;n]\!], h(e_i) = s_i e_i$). Pour i de $[\![1;n]\!]$, on pose $e'_i = u^{-1}(e_i)$.

1) Calculer $f(e'_i)$ pour i de $[\![1;n]\!]$, puis pour x de E calculer f(x) en fonction de x, $s_1,\ldots,s_n,e_1,\ldots,e_n,e'_1,\ldots,e'_n$.

2) Soit dans $\mathcal{B}$ base orthonormée quelconque E_i la matrice colonne des coordonnées de e_i, et E'_i la matrice colonne des coordonnées de e'_i, et A la matrice de f.

Etablir l'égalité: $A=\sum_{i=1}^{n} s_i E_i {}^t E'_i$.

IV.

1) Pour $A=(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $Vec(A)=\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \\ a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2,1}(\mathbb{R})$. (C'est-à-dire qu'on empile toutes les colonnes de A)

a) Montrer que Vec est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_{n^2,1}(\mathbb{R})$.

b) Pour A et C matrices carrées d'ordre n, on définit $(A|C) = {}^t Vec(A)Vec(C)$. Montrer que l'on obtient ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que $(A|C) = Tr({}^tAC)$, où Tr désigne la trace d'une matrice carrée. Que peut-on dire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire? (On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la famille $(U_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]^2}$, où $U_{i,j}$ est la matrice à n lignes et n colonnes formee uniquement de 0, sauf en ligne i, colonne j, où elle comporte un 1).

Soient U et V deux matrices carrées d'ordre **2**. On considère la matrice carrée d'ordre **4** définie par blocs par: $U \otimes V = \begin{pmatrix} u_{1,1}V & u_{1,2}V \\ u_{2,1}V & u_{2,2}V \end{pmatrix}$.

2) On considère l'application B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans lui-même qui à une matrice A dont les colonnes sont C_1, C_2, C_3, C_4 associe $B(A)=\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$, (définition par blocs) où pour k compris entre 1 et 4, $A_i = Vec^{-1}(C_i)$.

a) Montrer que B est un automorphisme de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

b) Montrer que B conserve le produit scalaire de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ défini au 1).

c) Montrer que: $\forall (A,C) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, B(Vec(C)^t Vec(A)) = A \otimes C$.

3) Déduire des questions précédentes et du III que: pour toute matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, il existe deux familles orthonormées de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, (U_1, U_2, U_3, U_4) et (V_1, V_2, V_3, V_4) et des réels $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_4 \geq 0$, tels que: $A=\sum_{k=1}^{4} s_k U_k \otimes V_k$.